

ÜSLÜ SAYILAR

1. **Tanım:** Tekrarlı çarpımların kısa yol gösterimine üslü sayılar denir. Tekrar sayısı çarpılan sayının sağ üst köşesine yazılır.

a^n ifadesi n tane a'nın çarpımı anlamına gelmektedir.

$$2^3 = 2.2.2 = 8 \text{ (3 tane 2'nin çarpımı demek)}$$

$$5^2 = 5.5 = 25 \text{ (2 tane 5'in çarpımı demek)}$$

- Sıfır sayısının her kuvveti yine sıfırdır. (sıfır hariç) $0^0 = \text{Tanımsız}$

- Sıfır hariç herhangi bir sayının üssü sıfır ise sonuç 1 olur.

$$5^0 = 1, 1453^0 = 1 \text{ gibi Anacak } 0^0 = \text{Tanımsız}$$

- 1 sayısının her üssü yine 1'dir.
- Sayılarda genelde 1. Üs yazılmaz ama ihtiyaç anında sen yazabilirsin.
- 2. Üsse kare denir çünkü 2. Üs bir karenin alanını verir.
- 3. Üsse küp de denir çünkü 3. Üs bir küpün hacmini verir.

2. Bir sayıyı üslü sayı biçiminde yazma;

Verilen sayı asal çarpanlarına ayrılır. Elde edilen asal sayılar üslü sayı biçiminde yazılır. Asal sayılar; 2,3,5,7,11,13,...

$$32 \mid 2 \quad 32=2.2.2.2.2=2^5$$

$$16 \mid 2$$

$$8 \mid 2 \quad 32=2^5 \text{ Şeklinde üslü sayıya çevirmiş olduk.}$$

$$4 \mid 2$$

$$2 \mid 2$$

$$1$$

- Verilen üslü ifadede taban asal sayı değilse ilk önce tabanı üslü sayıya çevirmeliyiz.

3. Üssün parantez üssünü hesaplama;

- Üsler çarpılır elde edilen sayı tabana üs olarak yazılır. Tabanı üslü sayıya çevirince bu kuralı uyguluyoruz.

$$(2^4)^3 = 2^{4.3} \text{ üsleri çarptığımızda}$$

sonucu 2^{12} olarak hesaplarız.

8^5 sayısında 8 yerine üslü hali olan 2^3 'ü yazabiliriz.

$8^5 = (2^3)^5$ elde edilir. Buradan da üssün parantez üssü

kuralını uygulayarak $8^5 = (2^3)^5 = 2^{15}$ elde edilir.

- Ancak parantez yoksa üslü sayının üssü de üslü sayıdır.

$$5^{3^2} = 5^9$$

4. Negatif sayıların üssü;

- Pozitif sayıların tüm üslerinin sonu yine pozitifdir
- Eksinin (-) parantez üzeri çift sayıdaki üssü hesaplandığında sonuç mutlaka pozitif (+) olur. Diğer durumlarda sonuç eksi (-) çıkacaktır.

Örnek;

$$(-2)^6 = +2^6 = 64 \quad (-2)^7 = -2^7 = -128$$

$$-2^6 = -2^6 = -64 \quad -2^7 = -2^7 = -128$$

Burada en önemli sayı -1'dir. -1'in parantez üzeri çift üslerinin sonucu her zaman +1 olur. Diğer üsleri ise her zaman -1 olur.

$$(-1)^{\text{çift sayı}} = +1$$

-1'in diğer üsleri her zaman -1'dir.

- Üslü sayı sorularında taban negatif ise ilk önce işaretine karar vermelisin!

5. Kesir ve Ondalıklı sayının üssü;

- Kesirlerde tekrarlı çarpımlar üslü olarak yazılır. Üs, hem pay kısmındaki hem de payda kısmındaki sayının üssü olarak yazılabilir.

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \text{ veya } \frac{2^4}{3^4} \text{ olarak yazılır. Yani üs pay ve payda üs olarak dağılır.}$$

- Yani ortak üs parantez içindeki sayılara tek tek üs olarak yazılır veya tek tek yazılmış üs ortak paranteze alınır.

$\left(-\frac{8}{25}\right)^4$ üslü ifadesi verildiğinde ilk olarak tabanın negatif olduğu, verilen sayıların asal sayı olmadıkları görülmeli ve ona göre işlemlere başlanmalı.

$$\left(-\frac{8}{25}\right)^4 = \left(-\frac{2^3}{5^2}\right)^4 = +\frac{(2^3)^4}{(5^2)^4} = +\frac{2^{12}}{5^8}$$

- Ondalıklı sayıların da tekrarlı çarpımları üslü olarak yazılabilir. İşlem sonucunu hesaplamak için ondalıklı sayıları kesre çevirip işleme devam etmek daha mantıklıdır.

$$(0,5) \cdot (0,5) \cdot (0,5) = (0,5)^3 \text{ Buradan 0,5 sayısını kesre çevirelim;}$$

$$(0,5)^3 = \left(\frac{5}{10}\right)^3 \text{ üsleri içeri dağıtalım;}$$

$$\left(\frac{5}{10}\right)^3 = \frac{5^3}{10^3} = \frac{125}{1000} \text{ ondalık hali:0,125 olur.}$$

- Kesirli işlemlerde sadeleştirme olabilir. Bunun kararını şıklara göre verebiliriz. Eğer şıklarda ondalık sayı varsa sadeleştirmeden devam ederiz, eğer kesir sonucu varsa sadeleştirip devam ederiz. Bir sayı kesir halde, ondalık halde gösterilebilir.

6. Negatif üs;

- Üssü negatif olan tam sayı 1 sayısının altına payda olarak yazılırsa üslü sayının üssü pozitif olur. Tam sayıların negatif üssü rasyonel sayı olur (takla atma).

$$a^{-n} = \frac{1}{a^{+n}}, \text{ örnek: } 2^{-1} = \frac{1}{2^{+1}} = \frac{1}{2} \text{ örnek; } 5^{-2} = \frac{1}{5^{+2}} = \frac{1}{5 \cdot 5} = \frac{1}{25} \text{ 'dir.}$$

$$(-3)^{-4} = \frac{1}{(-3)^{+4}} = \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = \frac{1}{81}$$

$$\frac{1}{3^5} = 3^{-5} \text{ Ters taklada da üs işaret değiştirir.}$$

- Eğer kesrin üssü negatif ise kesir takla atar üs pozitif olur. 5. Maddedeki kurallar geçerli olur. Kesirlerde sadeleşme olabilir!

$$\left(\frac{2}{10}\right)^{-5} \Rightarrow \frac{\text{kesir takla atar} \rightarrow}{\text{üs işaret değiştirir} \rightarrow} \left(\frac{10}{2}\right)^5 \text{ elde edilir.}$$

- Eğer ondalıklı sayının negatif üssü varsa ondalıklı sayı kesre çevrilir. Kesirlerde negatif üs kuralından devam edilir. Kesirlerde sadeleşme olabilir, şıklara göre karar ver!

$$(0,25)^{-2} \Rightarrow \frac{\text{ondalıklı sayı}}{\text{kesre dönüştü}} \left(\frac{25}{100}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{25}{100}\right)^{-2} \Rightarrow \frac{\text{kesir takla atar}}{\text{üs pozitif olur}} = \left(\frac{100}{25}\right)^2 = 4^2$$

7. 10'un kuvvetleri ve Çözümleme

- 10 sayısının üssü demek 1 sayısının yanında kaç tane sıfır veya virgülden sonra kaç basamak var olduğunu söyler.

$$1000000 = 10^6 \text{ (1'in yanında 6 tane sıfır var)}$$

$$0,00001 = 10^{-5} \text{ (virgülden sonra 5 basamak var)}$$

10^n sayısı n+1 basamaklı bir sayıdır. Ancak 10^n sayısının yanında başka çarpan olabilir. Basamak sayısı da hesaplanırken o çarpanın da basamak sayısı sayılır.

1453. 10^{23} sayısı 4+23 ten 27 basamaklıdır.

- Kaç basamaklıdır sorularında her zaman 10'un kuvveti hazır olarak verilmez. Bu durumda çarpımı 10 eden 2 ve 5 asal sayılarına odaklanmalıyız. Bu durumu üslü sayılarda çarpmanın 2. Kuralında inceleyeceğiz.
- Kaç basamaklıdır? Sorularında bazen çıkarma işlemlerinin sonucunda kaç basamak 9 dur soruları sorulur. Bu durumda 10luk bozma yüzünden sayının sonundaki sıfırlar 9'a dönüşür.

$10^{18} - 1 =$ işleminde 10^{18} sayısının sondan 18 basamağı sıfırdır. Çıkarma işlemi yapıldığında bu sıfırların hepsi 9'a dönüşür.

Çözümleme; Sayıdaki rakamları bulundaki basamaklar ile çarpımların toplamı halinde yazmaktır. Basamaklar büyükten küçüğe doğru sıralıdır.

$$52,34 = (5 \times 10) + (2 \times 10^0) + (3 \times 10^{-1}) + (4 \times 10^{-2})$$

$$70,004 = (7 \times 10^2) + (4 \times 10^{-3})$$

10 sayısının üsleri sıra ile gider. Olmayan üs demek o basamak sıfır demektir.

Binler $\ll 10^3$

Onda birler $\ll 10^{-1}$

Yüzler $\ll 10^2$

Yüzde birler $\ll 10^{-2}$

Onlar $\ll 10$

Binde birler $\ll 10^{-3}$

Birler $\ll 10^0$

Virgülün sol tarafı sıfıncı üsle başlar ve sol tarafa artarak devam eder.

Virgülün sağ tarafı -1 ile baslar ve sağ tarafa azalarak devam eder.

+3 +2 +1 +0 , -1 -2 -3 -4 10'un kuvvet sırası

8. Üslü sayılarda çarpma işlemi

Tabanlar aynı ise üsler toplanır ortak tabana üs olarak yazılır. Üslü sayı tekrar sayısı demektir. Tabanlar aynı sayı olunca tekrar sayısını yani üsleri toplamamız çarpma işlemi için yeterli.

$$a^b \cdot a^c = a^{b+c}$$

$$2^5 \cdot 2^4 = 2^{5+4} = 2^9$$

2 den 5 tekrar ile 2 den 4 tekrarın çarpımı 2 den 9 tekrardır.

$$3^{-2} \cdot 3^5 = 3^{-2+5} = 3^3$$

3 ten -2 tekrar ile 3 ten 5 tekrarın çarpımı 3 ten 3 tekrardır.

Üsler aynı ise tabanlar çarpılır ortak üsse taban olarak yazılır. Üslerin aynı olması farklı sayıların tekrarlarının aynı olması demektir. Çarpma işleminde bu farklı sayıları kendi içince grpladığımız zaman tekrar sayısı değişmez anca grpladığımız sayılar çarpılır.

$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$ bu durum aynı zamanda üssün paranteze alınması veya parantezdeki üssün dağılması demektir.

$$2^4 \cdot 5^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10000$$

Tabanlar aynı değilse asal çarpanlara ayırarak tabanlar üslü sayıya çevrilir.

$$32^2 \cdot 25^5 = (2^5)^2 \cdot (5^2)^5 = 2^{10} \cdot 5^{10} = 10^{10}$$

- Bu kurala örnek olarak kaç basamaklıdır soruları vardır. Burada bize verilen sayıları üslü sayıya çevirdikten sonra 2 ve 5 asallarının kuvvetlerini eşitlemek ve üsler eşitse tabanlar çarpılır kuralından 10 sayısının üssünü elde etmemiz gerekir. Geri kalan sayıları da hesaplayarak kaç basamaklı olduğunu bulabiliriz.

$16^9.125^{10}$ sayısı kaç basamaklıdır?

öncelikle taban asal değil!

$(2^4)^9.(5^3)^{10}$ üssün parantez üssü oluştu!

$2^{36}.5^{30}$ 2 den 36 tekrar 5 ten 30 tekrar var.

üslerin eşit olması için 2 den 6 tekrarı ayrı çarpan olarak yazmalıyız.

$2^6.2^{30}.5^{30} = 64.10^{30}$ Sayısı 64 sayısının yanına 30 tane sıfır yazmaktır.

$16^9.125^{10}$ sayısı 32 basamaklıdır.

9. Üslü sayılarda bölme işlemi

Tabanlar aynı ise payın üssünden paydanın üssü çıkarılır (Sadeleşme olduğundan çıkarma sırlaması önemlidir.)

2. bir yöntem olarak, paydadaki üslü sayı üssünün işareti değişerek paya çarpı olarak yazılır.(takla atma)

$$\frac{a^b}{a^c} = a^{b-c} \text{ veya } \frac{a^b}{a^c} = a^b . a^{-c} = a^{b-c}$$

$$\frac{2^5}{2^8} = 2^{5-8} = 2^{-3} = \frac{1}{2^{+3}} = \frac{1}{8}$$

Üsler aynı ise tabanlar bölünür ortak üsse taban olarak yazılır. (Kesirlerin üssü)

$$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$\frac{10^7}{2^7} = \left(\frac{10}{2}\right)^7 = 5^7$$

Üsler aynı değilse tabanlar asal çarpanlara ayırarak üslü sayıya çevrilir.

10. Üslü sayılarda toplama ve çıkarma işlemleri;

Tabanı ve üssü aynı olan üslü sayılar ortak paranteze alınır. İşlemler katsayılar arasında yapılır.

$$2.3^{10} + 5.3^{10} - 3^{10} = 3^{10} (2 + 5 - 1) = 6.3^{10} = 2.3^{11}$$

Üslü sayılar parçalanarak da ortak paranteze alınabilir. Bu durumda küçük üslü sayıyı ortak paranteze almak mantıklıdır.

Örnek;

$$3^5 + 3^6 + 3^7 \rightarrow \text{en küçük üs ortaktır!}$$

$$3^5 + 3.3^5 + 3^2.3^5 \rightarrow 3^5 \text{ 'ler ortak oldu!}$$

$$3^5.(1 + 3 + 3^2) = 3^5.(1 + 3 + 9) = 3^5.13 \text{ olur.}$$

$$2^{-10} + 2^{-11} - 2^{-12} \rightarrow \text{en küçük üs ortaktır!}$$

$$2^{-12}.2^2 + 2^{-12}.2^1 - 2^{-12}.1 \rightarrow 2^{-12} \text{ 'ler ortak oldu!}$$

$$2^{-12}.(2^2 + 2^1 - 1) = 2^{-12}.(4 + 2 - 1) = 5.2^{-12} \text{ olur.}$$

11. Üslü sayılarda sıralama

- Önce üslü sayıların sonuçları negatif mi pozitif mi olacak? Buna karar vermeliyiz. Çünkü negatif sayılar $< 0 <$ pozitif sayılar sıralaması var. Bu sayede sık eleyebiliriz.

$$(-1)^{101} < (-1)^{10} \quad (-5)^{-12} > (-8)^9$$

- Sonra taban aynı ise üssü büyük olan büyüktür. Çünkü kimin tekrar sayısı fazlaysa o daha çok çıkar.

$$2^{16} < 2^{17} \quad 3^{-15} > 3^{-16}$$

- Üsler aynı ise tabanı büyük olan büyüktür. Tekrar sayısı aynı olduğundan çarpılan sayının büyüklüğüne bakılır.

$$5^{2020} > 3^{2020}$$

Not: üslü sayılar genelde hazır halde verilmez. Taban asal değilse üslü sayıya çevirmeyi akıl etmelisin!

12. Bilimsel gösterim;

Çok büyük ve çok küçük sayıları bilimsel gösterimde yazmak için sayının tam kısmı tek basamaklı olması gerekmektedir (**sıfır tam olmaz**). Bunun için sayı kaç basamak büyüdü ise 10 çarpanının üssü o kadar azalır. Sayı kaç basamak küçüldü ise 10 çarpanının üssü o kadar artar.

$$75.000.000 = 7,5 \cdot 10^{+7} \text{ sayı 7 basamak küçüldü.}$$

Virgülsüz sayılarda virgül en sondadır. 75.000.000,0 gibi unutma!

ve 10^0 dan başla

$$0,000012 = 1,2 \cdot 10^{-5} \text{ sayı 5 basamak büyüdü.}$$

10 un üssü yoksa 10^0 dan başla

Virgül hareketini halka halka say!

$$123,75 \cdot 10^{43} = 1,2375 \cdot 10^{45} \quad 0,048 \cdot 10^{15} = 4,8 \cdot 10^{13}$$

$$23,7 \cdot 10^{-34} = 2,37 \cdot 10^{-33} \quad 0,007 \cdot 10^{-67} = 7 \cdot 10^{-70}$$

13. Üslü denklemler;

- Tabanlar aynı sayı ise üsler eşit olmalı;

$$2^{x+3} = 2^8 \text{ ise } x+3=8 \text{ olmalıdır. Burdan } x=5 \text{ bulunur.}$$

- Üsler aynı sayı ise tabanlar aynı sayı olmalı;

$$5^7 = x^7 \text{ ise } x=5 \text{ olmalı}$$

$$5^8 = x^8 \text{ ise } x \text{ ya } 5 \text{ yada } -5 \text{ olur. (çift üs var)}$$

- Tabanlar aynı sayı değilse eşitlik olması için üslerin sıfır olması gerekir. **Çünkü üs sıfır ise sonuç 1'dir!**

$$2^{x+1} = 5^{y-2} \text{ gibi tabanlar aynı sayı değil}$$

ve eşitlik varsa üslerin sıfıra eşit olması gerekir.

$$x+1=0 \text{ dan } x=-1 \text{ olur ve } y-2=0 \text{ dan } y=2 \text{ olur.}$$

Not:

- Çarpım tablosu çok iyi bilinmelidir.
- Negatif sayıyı yerine yazarken parantez kullanın.
- Soruda negatif sayılar varsa önce 4. Maddeye göre inceleyin
- Sorularda bulduğunuz sonuç yoksa sonucun eşdeğeri olan sayıyı arayınız.
- Alan hesabı çarpma işlemi yaptırır.