



Matematik

Mantık Konu Anlatımı

ÖNERME

Doğru ya da yanlış kesin hüküm bildiren ifadelere **önerme** denir. Önermeler p, q, r, s, t, ... gibi harflerle gösterilir.

Önermenin belirttiği hüküm itibarıyla doğru ya da yanlış olmasına önermenin **doğruluk değeri** denir.

Bir önerme doğru bir hüküm belirtiyorsa böyle önermelere **doğru önerme** denir. D veya 1 ile gösterilir. Eğer önerme belirttiği hüküm itibarıyla yanlış bir hüküm belirtiyorsa böyle önermelere **yanlış önerme** denir. Y veya 0 ile gösterilir.

- Birbirinden farklı n tane önermenin 2^n tane doğruluk değeri vardır.

Örnek:

Aşağıdakilerden hangisi önermedir?

- A) Bugün hava nasıl?
- B) Orkide güzel bir çiçektir.
- C) 3 tek sayıdır.
- D) Bugün hava güzel.
- E) Yeşil rengi severim.

Örnek:

p: "Bir üçgenin iç açılarının toplamı 180° dir."

q: "12! sayısının sondan üç basamağı 0'dır."

r: "2, en küçük asal sayıdır."

Yukarıda verilen önermelerden hangilerinin doğruluk değeri "1" dir?

- A) Yalnız p
- B) Yalnız q
- C) p ve q
- D) p ve r
- E) p, q ve r

Denk Önermeler

Doğruluk değeri aynı olan önermelere denk önermeler denir. p ve q önermeleri denk ise $p \equiv q$ şeklinde gösterilir.

Bir Önermenin Olumsuzu (Değili)

Bir önermenin belirttiği hükmü olumsuz yaptığımızda elde ettiğimiz yeni önermeye baştaki önermenin **değili (olumsuzu)** denir.

p önermesinin değili p' ile gösterilir.

- $(p')' = p$ dir.

Örnek:

p: "Ankara Türkiye'nin başkentidir."

q: "0 bir rakam değildir."

r: "Bir dakika 60 saniyedir."

Yukarıda verilen önermelerin olumsuzlarının doğruluk değerleri aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 1, 0, 0
- B) 1, 0, 1
- C) 0, 1, 0
- D) 1, 1, 0
- E) 0, 0, 1

Bileşik Önermeler

İki veya daha çok önermenin "ve", "veya", "ya da", "ise" ve "ancak ve ancak" gibi matematiksel bağlaçlar ile bağlanması sonucu elde edilen yeni önermelere bileşik önerme denir.

Veya Bağlacı (V)

p veya q önermesi $p \vee q$ şeklinde gösterilir. Önermelerin her ikisi de yanlışken yanlış, diğer durumlarda doğru olan bileşik önermeler veya bağlacı ile yapılan bileşik önermelerdir.

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ve Bağlacı ($\wedge$)

p ve q önermesi $p \wedge q$ şeklinde gösterilir. Önergelerin her ikisi de doğru iken doğruluk değeri 1, diğer tüm durumlarda doğruluk değeri 0 olan bileşik önergeler ve bağlacı ile yapılan önergelerdir.

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

“ V ” ve “ $\wedge$ ” Bağlaçlarının Özellikleri

- Tek Kuvvet Özelliği
 $p \vee p \equiv p$ $p \wedge p \equiv p$
- Değişme Özelliği
 $p \vee q \equiv q \vee p$ $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- Birleşme Özelliği
 $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
 $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
- Dağılma Özelliği
 $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
 $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- De Morgan Kuralı
 $(p \vee q)' \equiv (p' \wedge q')$
 $(p \wedge q)' \equiv (p' \vee q')$
- Diğer Özellikler
 $p \vee 1 \equiv 1$ $p \wedge 1 \equiv p$
 $p \vee 0 \equiv p$ $p \wedge 0 \equiv 0$
 $p \vee p' \equiv 1$ $p \wedge p' \equiv 0$

Örnek:

$$[(p' \wedge q')' \wedge p'] \vee q$$

bileşik önermesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) q B) p C) 1 D) $p \wedge q'$ E) $p' \wedge q$

Ya Da Bağlacı ($\vee$)

p ve q önermelerinin ya da bağlacı ile bağlanması ile “p ya da q” bileşik önermesi elde edilir. $p \vee q$ şeklinde gösterilir.

p ile q önermelerinin her ikisinin de doğruluk değeri aynı ise $p \vee q$ bileşik önermesinin doğruluk değeri 0, p ile q önermelerinin doğruluk değerleri farklı ise $p \vee q$ önermesinin doğruluk değeri 1'dir.

p	q	$p \vee q$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Örnek:

$$(p \vee q) \vee (p' \vee q')$$

bileşik önermesinin eşiti aşağıdakilerden hangisidir? (Tablo yardımı ile yapınız.)

- A) 0 B) 1 C) p D) q E) p

Koşulu Önerme (İse Bağlacı) ($\Rightarrow$)

p ile q önermelerinin “ise bağlacı” ile birbirlerine bağlanması ile elde edilen önermeye **koşullu önerme** denir. $p \Rightarrow q$ şeklinde gösterilir.

“İse” bağlacı ile yapılan önergeler; birinci önerme doğru, ikinci önerme yanlışken doğruluk değeri “0” diğer durumlarda doğruluk değeri “1” olan önergelerdir.

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

- $p \Rightarrow q$ önermesine p önermesine **hipotez**, q önermesine **hüküm** denir. Ayrıca p önermesi q önermesi için yeter koşul, q önermesi p önermesi için gerek koşuldur.
- $p \Rightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri “1” ise bu önermeye **gerektirme** denir.

Koşullu Önermenin Özellikleri

- $p \Rightarrow q \equiv 1$
- $p \Rightarrow p' \equiv p'$
- $1 \Rightarrow p \equiv p$
- $p \Rightarrow 1 \equiv 1$
- $0 \Rightarrow p \equiv 1$
- $p \Rightarrow 0 \equiv p'$
- $p \Rightarrow q \equiv p' \vee q$

Örnek:

$$p' \Rightarrow (p' \Rightarrow q)$$

önermesinin en sade hâli aşağıdakilerden hangisidir?

- A) 0 B) 1 C) $p \wedge q$ D) $p \vee q$ E) $p' \vee q$

Koşullu Önermenin Karşıtı, Tersi ve Karşıt Tersi

p ve q önerme olmak üzere,

$p \Rightarrow q$ önermesi verilsin.

- $q \Rightarrow p$ önermesi $p \Rightarrow q$ ' nun karşıtı
- $p' \Rightarrow q'$ önermesi $p \Rightarrow q$ ' nun tersi
- $q' \Rightarrow p'$ önermesi $p \Rightarrow q$ ' nun karşıt tersidir.

Örnek:

"Bugün günlerden pazar ise okullar tatildir."

önermesinin karşıt tersi aşağıdakilerden hangisidir?

- A) Bugün günlerden pazar değilse okullar tatil değildir.
- B) Bugün günlerden pazar ise okullar tatil değildir.
- C) Okullar tatil değilse bugün günlerden pazar değildir.
- D) Okullar tatilse bugün günlerden pazardır.
- E) Bugün günlerden cumartesi ise okullar tatildir.

Not:

Bir önermenin doğruluk değeri ile karşıt tersinin doğruluk değeri birbirine **denktir**.

İki Yönlü Koşullu Önerme (Ancak ve Ancak) ($\Leftrightarrow$)

$p \Rightarrow q$ önermesi ile bunun karşıtı olan $q \Rightarrow p$ önermesinin ve bağlacı ile bağlanmasıyla elde edilen önermeye **iki yönlü koşullu önerme** denir. $p \Leftrightarrow q$ şeklinde gösterilir. "p ancak ve ancak q" şeklinde okunur.

p ile q önermelerinin doğruluk değeri aynı ise $p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri "1" dir. p ve q önermelerinin doğruluk değeri birbirinden farklı ise $p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri "0" dir.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

$p \Leftrightarrow q$ önermesinin doğruluk değeri "1" ise bu önermeye **çift yönlü gerektirme** denir.

İki Yönlü Koşullu Önermenin Özellikleri

- $p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
- $p \Leftrightarrow q \equiv q \Leftrightarrow p$
- $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r \equiv p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)$

Açık Önerme

İçerisinde en az bir değişken bulunduran ve bu değişkene verilen değerlere göre, doğru ya da yanlış değerler alabilen önermelere açık önerme denir.

Sadece x değişkenine bağlı verilen bir p önermesi $p(x)$ ile, x ve y değişkenlerine bağlı verilen p önermesi, $p(x, y)$ ile gösterilir.

Herhangi bir E evrensel kümesine bağlı verilen bir p açık önermesini sağlayan kümeye bu p açık önermesinin **doğruluk kümesi** denir.

Örneğin, $p(x)$: " $x - 1 \leq 3$ ve $x \in N$ " açık önermesinin doğruluk kümesi $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ tür.

NİCELEYİCİLER

Günlük hayatta kullandığımız ve önüne geldiği nesnenin (değişkenin), niceliğini ifade eden her, bütün, bazı, en az bir gibi sözcüklere niceleyici denir.

Evrensel Niceleyici ($\forall$)

Evrensel kümedeki tüm elemanları ifade eder. " $\forall x \in E, p(x)$ " şeklinde yazılır. $\forall x, p(x)$ önermesinin doğru olabilmesi için kümenin tüm elemanları için doğru olması gerekir. Aksi takdirde önerme, yanlış bir önerme olur.

Örneğin, "Bütün haftalar 7 gündür." önermesi doğrudur ancak "Her asal sayı tek sayıdır." önermesi yanlış bir önermedir. 2 asal sayıdır ve çifttir.

Varlıksal Niceleyici ($\exists$)

Kastedilen kümedeki elemanların bazıları veya en az biri anlamındadır. " $\exists x \in A, p(x)$ " şeklinde yazılır.

$\exists x, p(x)$ önermesinin doğru olabilmesi için önermeyi doğru yapan en az bir elemanın bulunması yeterlidir. Öyle bir eleman bulunamıyorsa önerme yanlıştır.

Örneğin, "Bazı aylar 30 gündür." önermesi doğru bir önermedir. " $\exists x, x^2 + 9 = 0 \ x \in \mathbb{R}$ " önermesi yanlış bir önermedir. Hiçbir reel sayının karesi negatif değildir.

Not:

x bir değişken, $p(x)$ bir açık önerme olsun.

$$[\forall x, p(x)]' \equiv \exists x, p'(x) \text{ ve}$$

$$[\exists x, p(x)]' \equiv \forall x, p'(x) \text{ tir.}$$